VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 4

Metode računanja određenog integrala. Nepravi integral

Metode računanja određenog integrala. Nepravi integral

Supstitucija u određenom integralu

Kao i kod neodređenog integrala i pri računanju određenog integrala često se koristi tehnika supstitucije integracijske varijable. Pritom možemo upotrijebiti jednu od sljedeće dvije metode:

(1) izvršimo zamjenu integracijske varijable i računamo neodređeni integral - nakon što nađemo primitivnu funkciju vraćamo se na staru varijablu; ovaj postupak *ne zahtijeva* promjenu granica integracije

(2) integracijsku varijablu mijenjamo direktno u određenom integralu - ovaj postupak podrazumijeva i odgovarajuću *promjenu granica integracije*.

Pri radu s ovom tehnikom posredno koristimo sljedeći rezultat:

Za neprekidnu funkciju f na intervalu $[a,b]$ i diferencijabilnu funkciju $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ takvu da je φ' neprekidna i $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Primjer 1

Koristeći obje metode supstitucije izračunajte $\int_0^2 2x(x^2+1)^3 dx$.

Rješenje:

1. način: Najprije računamo neodređeni integral koristeći supstitucijsku varijablu, a potom vraćamo izvornu varijablu i računamo dređeni integral. Supstitucija koju ćemo ovdje koristiti je $t = x^2 + 1$, iz čega slijedi da je $dt = 2xdx$. Sada možemo zamijeniti sve podintegralne elemente supstitucijskom varijablom:

$$\int 2x(x^2+1)^3 dx = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} = \frac{(x^2+1)^4}{4},$$

pa je

$$\begin{aligned}\int_0^2 2x(x^2+1)^3 dx &= \frac{(x^2+1)^4}{4}\Big|_0^2 = \\ &= \frac{(2^2+1)^4}{4} - \frac{(0^2+1)^4}{4} = \frac{625}{4} - \frac{1}{4} = 156.\end{aligned}$$

2. način: Osim podintegralnih elemenata, supstituirat ćemo i granice integracije. Supstitucija $t = x^2 + 1$ odgovara i na pitanje koje su (u terminima varijable t) nove granice integracije: za donju granicu imamo $x = 0 \Rightarrow t = 1$, a za gornju $x = 2 \Rightarrow t = 5$, pa integral postaje

$$\int_0^2 2x(x^2+1)^3 dx = \int_1^5 t^3 dt = (\frac{t^4}{4})|_1^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 156.$$

Napomena:

Važno je uočiti pogodnu supstituciju i pritom paziti da je veza između početne i supstitucijske varijable jednoznačna.

Primjer 2

Izračunajte određeni integral $\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$.

Rješenje:

Uvodimo supstituciju $1 + 2x = t^2$, odakle slijedi $x = \frac{t^2-1}{2}$, što nakon diferenciranja daje $dx = tdt$.

Ako pokušamo izraziti supstitucijsku varijablu t preko početne integracijske varijable x, naići ćemo na poteškoće. Naime, iz veze $1 + 2x = t^2$ nije moguće jednoznačno izračunati supstitucijsku vezu, jer imamo dvije mogućnosti: $t = \sqrt{1+2x}$ ili $t = -\sqrt{1+2x}$. Oba ova izbora su dobra, ali se nužno trebamo odlučiti za samo jedan i s njime potom nastaviti račun. Neka je veza dana s $t = \sqrt{1+2x}$.

1. način: za donju granicu integracije imamo $x = 1 \Rightarrow t = \sqrt{3}$, a za gornju $x = 4 \Rightarrow t = 3$, pa je

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx &= \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{\frac{t^2-1}{2} \cdot tdt}{t} = \int_{\sqrt{3}}^3 \frac{t^2-1}{2} dt = \\
&= \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t)|_{\sqrt{3}}^3 = \frac{1}{2}(\frac{3^3}{3} - 3 - \frac{\sqrt{3}^3}{3} + \sqrt{3}) = 3.
\end{aligned}$$

2. način: računamo najprije neodređeni integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \int \frac{t^2-1}{2} dt = \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t),$$

a potom se vraćamo na početnu integracijsku varijablu x: $t = \sqrt{1+2x}$, pa je konačno

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx = \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{1+2x}^3}{3} - \sqrt{1+2x})|_1^4 = 3.$$

Što bi se dogodilo da smo za vezu između x i t uzeli $t = -\sqrt{1+2x}$? Računajmo po prvom načinu: za donju granicu integracije imamo $x = 1 \Rightarrow t = -\sqrt{3}$, a za gornju $x = 4 \Rightarrow t = -3$, pa je (obratite pažnju na predznak $-$ u podintegralnoj funkciji!)

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx &= \int_{-\sqrt{3}}^{-3} \frac{\frac{t^2-1}{2} \cdot tdt}{-t} dt = -\int_{-\sqrt{3}}^{-3} \frac{t^2-1}{2} dt = \int_{-3}^{-\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{2} dt = \\
&= \frac{1}{2}(\frac{t^3}{3} - t)|_{-3}^{-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\frac{(-\sqrt{3})^3}{3} + \sqrt{3}) - \frac{(-3)^3}{3} - 3)) = 3.
\end{aligned}$$

Posebno su važne supstitucije kod kojih funkcijska veza između početne i supstitucijske varijable nije očita, kao u sljedećem primjeru.

Primjer 3

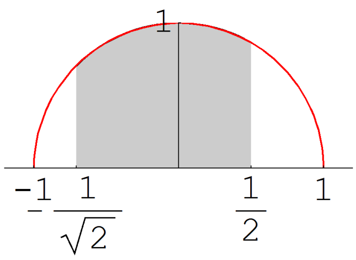
Izračunajte $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

Uvodimo tipičnu supstituciju za ovakve integrale: $x = \sin t$, odakle slijedi $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t|$, a $dx = \cos t dt$. Da bismo imali jednoznačnu vezu između x i t, moramo odabrati smo jedan dio domene sinusne funkcije, i to takav da se postižu sve vrijednosti iz skupa vrijednosti $[-1,1]$. Uzmimo $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Kako u tom području kosinus poprima samo pozitivne vrijednosti, možemo maknuti znak apsolutne vrijednosti, pa je $\sqrt{1-x^2} = \cos t$. Dalje, granice integracije sada nije teško odrediti: za donju granicu imamo $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4}$, a za gornju $x = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$, pa je

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \cos t \cdot \cos t dt = \\ &= (\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t)|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{24}(5\pi + 3\sqrt{3} + 6). \end{aligned}$$

Što se geometrijske interpretacije rezultata tiče, broj $\frac{1}{24}(5\pi + 3\sqrt{3} + 6) \approx 1.121$ odgovara površini dijela gornje polukružnice sa središtem u ishodištu i radijusom 1 – to je dio omeđen pravcima $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x = \frac{1}{2}$:



Primjer 4

Izračunajte $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx$.

Rješenje:

Uvodimo supstituciju $e^x - 1 = t^2$. Sada je $e^x dx = 2tdt$, pa iz $e^x = t^2 + 1$ slijedi $dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$. Ako uzmemo $t = \sqrt{e^x - 1}$, onda za donju granicu integracije imamo $x = 0 \Rightarrow t = 0$, a za gornju $x = ln2 \Rightarrow t = 1$, pa je

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \cdot \frac{2t}{t^2+1}dt &= 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = \\ &= 2\int_0^1 (1 - \frac{1}{t^2+1})dt = 2(t - \arctan t)|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Zadatak 1 Metodom supstitucije riješite sljedeće određene integrale:

(1) $\int_0^1 (x+3)^{10}dx$

(2) $\int_{-1}^{2} x\sqrt{8-x^2}dx$

(3) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$

(4) $\int_{0}^{1} x^3\sqrt{x^2+3}dx$

(5) $\int_{0}^{2}(2-3x^2)(x^3-2x+1)^2dx$

(6) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+9}}dx$

(7) $\int_{0}^{1}(e^x-1)^4e^xdx$

(8) $\int_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{x}dx$

(9) $\int_{1}^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{2+3\cos^2 x}\sin 2xdx.$

Parcijalna integracija u određenom integralu

Kao i kod neodređenog integrala, i kod računanja određenog integrala možemo koristiti tehniku parcijalne integracije, tj. formulu

$$\int_a^b udv = (uv)|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Pritom je važno primijetiti da se u ovako skraćenoj formuli nigdje eksplicitno ne piše integracijska varijabla x, ali da se granice integracije a i b odnose upravo na nju.

Primjer 5

Izračunajte $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx.$

Rješenje:

Parcijalno integriramo na sljedeći način: $\frac{dx}{\sin^2 x} = dv \Rightarrow v = -\cot x$, $u = x \Rightarrow dx = du$, pa je

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x}dx &= (-x\cot x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cot xdx = \\ &= -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4}\cdot 1 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}dx\end{aligned}$$

Uvodimo supstituciju $\sin x = t$, odakle je $\cos xdx = dt$, pa je

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}dx &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t} = (\ln t)|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \\ &= \ln\sqrt{3} - \ln\sqrt{2} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

Sada imamo

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\sin^2 x} dx = -\frac{\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Primjer 6 Izračunajte $\int_0^1 \arctan x dx$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

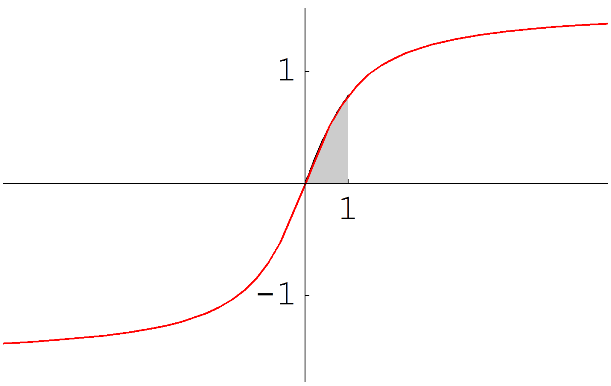
Rješenje: Parcijalno integriramo tako da uzmemo $u = \arctan x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $dv = dx \Rightarrow v = x$ pa imamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x dx &= (x \cdot \arctan x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= \arctan 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx, \end{aligned}$$

gdje dobiveni integral rješavamo supstitucijom $1 + x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt \Rightarrow xdx = \frac{1}{2} dt$ (granice integracije: $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 2$). Dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x dx &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dt}{t} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln |t|)|_1^2 = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

Rezultat (koji približno iznosi 0.439) odgovara površini lika odozgo omeđenog grafom funkcije $f(x) = \arctan x$, odozdo s $x-$osi, slijeva pravcem $x = 0$, a zdesna pravcem $x = 1$:



Zadatak 2

Primjenom parcijalne integracije izračunajte sljedeće određene integrale:

(1) $\int_{\ln 1}^{\ln 2} xe^x dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin x dx$

(3) $\int_0^{e-1} \ln(1+x) dx$.

Nepravi integral

Često se u zadacima pojavljuju integrali funkcija koje se ne mogu evaluirati u nekoj od rubnih točaka ili u nekoj od unutrašnjih točaka intervala integracije. U tom slučaju koristimo sljedeću definiciju:

> Ako se neka od granica integracije nalaze u beskonačnosti definiramo (uz uvjet da svaki od sljedećih limesa postoji i konačan je):
>
> (1) $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$
>
> (2) $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$
>
> (3) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx.$
>
> Ako unutar integracijskog intervala $[a,b]$ funkcija f ima prekid u točki c ili u toj točki nije definirana, onda definiramo (uz uvjet da sljedeći limes postoji i konačan je):
>
> $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to c-0}\int_a^{\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to c+0}\int_{\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

Primjer 7

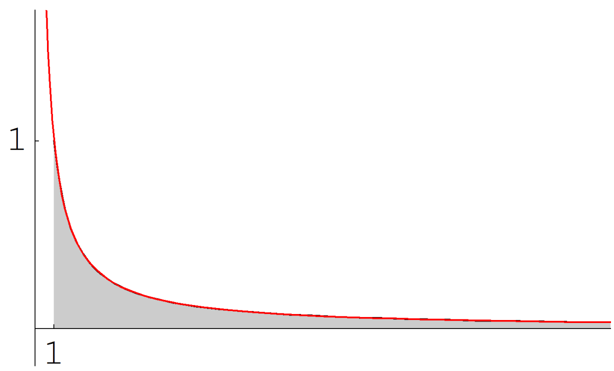
Izračunajte $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

Koristimo gornju definiciju i računamo

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x} &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty}(\ln x)|_1^b = \\ &= \lim_{b\to\infty}\ln b - \ln 1 = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty.\end{aligned}$$

Rezultat govori da lik odozgo omeđen grafom funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$, odozdo s $x-$osi te slijeva pravcem $x = 1$ ima beskonačnu površinu:



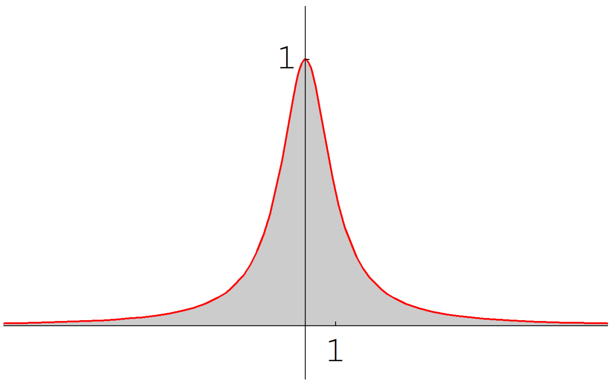
Primjer 8

Izračunajte $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ i geometrijski interpretirajte rezultat.

Rješenje:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}= \\
&= \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}= \\
&= \lim_{a\to-\infty}(\arctan x)|_a^0+\lim_{b\to\infty}(\arctan x)|_0^b= \\
&= \lim_{a\to-\infty}(-\arctan a)+\lim_{b\to\infty}(\arctan b)= \\
&= -(-\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{2}=\pi.
\end{aligned}$$

Rezultat integracije, dakle broj π, odgovara površini otvorenog područja omeđenog odozgo grafom funkcije $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, a odozdo s $x-$osi:



Napomena: Slično kao gore pokušajte riješiti $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{1+x^2}$. Ako nacrtate sliku podintegralne funkcije, izgleda (zbog njene neparnosti) kao da ovaj nepravi integral postoji i jednak je nuli. Međutim, rješavanje po principu gornjeg primjera vodi nas na zbroj dva limesa, od kojih je prvi $-\infty$, a drugi ∞, što znači da ovaj nepravi integral *ne postoji*.

Pogledajmo što se događa kada podintegralna funkcija ima prekid unutar integracijskog područja:

Primjer 9

Izračunajte $\int_1^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

Rješenje:

Očito je da podintegralna nije definirana u točki $x=2$, pa je

$$\begin{aligned}
\int_1^4\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} &= \lim_{\varepsilon_1\to 2-0}\int_1^{\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to 2+0}\int_{\varepsilon_2}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}= \\
&= \lim_{\varepsilon_1\to 2-0}(3\sqrt[3]{x-2})|_1^{\varepsilon_1}+\lim_{\varepsilon_2\to 2+0}(3\sqrt[3]{x-2})|_{\varepsilon_2}^{4}= \\
&= \lim_{\varepsilon_1\to 2-0}(3\sqrt[3]{\varepsilon_1-2}+3)+\lim_{\varepsilon_2\to 2+0}(3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{\varepsilon_2-2})= \\
&= 3+\sqrt[3]{2}.
\end{aligned}$$

Primjer 10

Izračunajte $\int_0^\infty xe^{-x}dx$.

Rješenje:

Koristimo tehniku parcijalne integracije: $x = u \Rightarrow dx = du$, $dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$, pa je

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xe^{-x}dx &= (-xe^{-x})|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx = \\
&= \lim_{b\to\infty}(-xe^{-x})|_0^b + \lim_{b\to\infty}(-e^{-x})|_0^b = \\
&= \lim_{b\to\infty}\frac{-b}{e^b} + \lim_{b\to\infty}(-e^{-b} + e^0) = (L'H) = \\
&= \lim_{b\to\infty}(\frac{-1}{e^b}) + 1 = 1.
\end{aligned}$$

Zadatak 3 Izračunajte sljedeće neprave integrale:

(1) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(x-1)^2}$

(2) $\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$

(3) $\int_0^\infty e^{-x}dx$

(4) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(5) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

(6) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}$

(7) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(8) $\int_0^\infty \frac{e^x dx}{(e^x+1)^2}$

(9) $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}$

(10) $\int_0^1 (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \ln x)dx.$